المملكة العربية السعودية

جامعة الطايف

قسم الرياضيات

عنوان البحث

نظريات في المعادلات التفاضلية

اعداد الطلاب

الفهرس:

مقدمة:

بسـم الله فاطر السـماوات والأرض، بسـم الله فالق الحب والنوى، نحمدك ربي على جميع النعم التي أنعمت بها علينا من عقلًا مفكرًا ولسانًا ناطقًا للتعبير عن كل ما نسعى إليه ويوجد في عقولنا. بسم الله نبدأ بحثنا والذي يعتبر من الموضوعات المهمة التي تواجهنا في الرياضـيات. كما أنه من الموضـوعات التي طالما تمنينا أن نسـرد فيها ونعبر عنها نظرية الوجود والوحدانية ونظرية باناخ".

هذا البحث الذي نتناوله من الأبحاث التي لها صـدى كبير في الرياضـيات، والتي نحتاج إلى أن نعرف عنها الكثير والكثير. ولذلك سـوف نعرض لكم بعض المعلومات التي وفقنا الله على جمعها في هذا الموضـوع. كما نتمنى أن ينال هذا الموضـوع رضاكم، فنبتدي بسم الله موضوعنا.

أهمية البحث:

نظرية الوجود والوحدانية من أشهر النظريات وأهمها وتستخدم في حل المعادلات التفاضلية العادية وتمدنا نظرية باناخ بنظريات منها نظريات في وجود ووحدانية المعادلات التفاضلية وتستخدم لإثبات نظرية بيكارد التي لها دور مهم في نظرية المعادلات التفاضلية العادية.

أهداف البحث:

- نظرية الحل الوحيد
- نظرية باناخ

نظرية الوجود والوحدانية

مقدمة

سوف نقوم بدراسة نظرية الوجود والوحدانية ثم سنورد أمثلة عليها.

خلال دراسة الوجود والوجدانية لحلول مسالة كوشي اتعرض لثلاث محاور رئيسية هي:

(1) هل يوجد لهذا المسالة؟

(2) أن وجد حل لهذه المسالة فهل يكون هذا الحل وحيد؟

(3) ما هي الكيفية التي تمكننا من أيجاد حلول هذه المسالة؟

2 نظرية الوجود والوحدانية

لتكن $\int: |x| \to R$ دالة متصلة حيث $|x|$ مستطيل مفتوح من $R \times R$ إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير الثاني أي يوجد عدد $k > 0$ حيث

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k\ |y_1 - y_2|; \qquad \forall r \in I, \forall y_1, y_2 \in J$$

عندئذ لكل (r_0, y_0) نقطة داخلية من $I \times J$ توجد فترة $I_h := [r_0 - h, r_0 + h]$ ويوجد حل وحيد y لمسألة كوشي (1.1) معرف على الفترة I_h.

البرهان:

أولاً: نوجد الفترة $I_h = [r_0 - h, r_0 + h]$

لدينا $(r_0, y_0) \in I \times J$ إذن يوجد جوار مغلق $[r_0 - a, r_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ داخل المستطيل $I \times J$ بما وبما أن الدالة f متصلة على $I \times J$ إذن فهي متصلة أيضًا على $I_a x J_b := [r_0 - a, r_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ وعليه فإنه يوجد ثابت $M > 0$ حيث:

$$|f(x, y)| \leq M; \qquad \forall (x, y) \in I_a x J_b$$

نختار العدد $h \leq a$ و $h \leq \frac{b}{M}$ بصورة أخرى $h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

ثانياً: نوجد الدالة y.

نســـتخدم طريقة بيكارد للتقريب للحصـــول على حل للمســـألة (1.1). لتكن المتتالية y_n المعرفة على الفترة I_h تعطى بالقانون التالي:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n^{-1}}(t)\big)\, dt \,; \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(a) لكل $x \in I_h$ لدينا $y_n(x) \epsilon J_b : \forall n \geq 1$ أي $\big(x, y_n(x)\big) \in I_h \times J_b ; \forall n \geq 1$ سنثبت صحة (a) باستخدام الاستنتاج الرياضي.

عندما $n = 1$ نجد

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt$$

$$\leq M \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\leq M|x - x_0|$$

$$\leq Mh$$

$$\leq b.$$

إذن لكل $x \in I_h$ لدينا $y_1(x) \in J_b$.

الآن نفرض صحة العلاقة عند العدد n أي أن

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \cdot$$

والمطلوب اثبات صحة العلاقة عند $n + 1$.

لدينا لكل $x \in I_h$

$$y_{n+1}(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt$$

إذن

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt$$

$$\leq M \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\leq M|x - x_0|$$

$$\leq Mh$$

$$\leq b.$$

طريقة بيكارد للتقريب المتتالي

سنحاول في بقية الأمثلة إيجاد تقريب للحل ومن ثم إيجاد الحل أو إيجاد متتالية دوال نهايتها الحل.

مثال

لتكن لدينا مسألة كوشي التالية:

$$y' - x^2 = 0; y(2) = 1 \cdot$$

سنحاول إيجاد الحل العام لها.

نفرض أن:

$$f(x, y) = x^2 \cdot$$

وبالاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتغير y نجد

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdot$$

الدالة f ومشتقتها الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}$ متصلتان على $\mathbb{R}^2$، والنقطة $(2,1) \in \mathbb{R}^2$.

يوجد حل وحيد لهذه المسألة ويمكن ايجاده باستخدام أحد الطرق المباشرة ولتكن طريقة بيكارد للتقريب المتتالي

لدينا

$$y_0(x) = y_0 = 1 \cdot$$

والتقريب الأول y_1 لا للحل يعطى بالعلاقة التالية:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_0(t)\big)\, dt$$

$$= 1 + \int_{2}^{x} t^2\, dt$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

التقريب الثاني y_2 للحل يعطى بالعلاقة التالية:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\, dt$$

$$= 1 + \int_{2}^{x} t^2\, dt$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

التقريب الثالث y_3 للحل يعطى بالعلاقة التالية:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_2(t)\big)\, dt$$

$$= 1 + \int_{2}^{x} t^2\, dt$$

$$= 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

ومن شكل الحل المتكون يمكن أن نتوقع أن يكون الحل النوني كالآتي:

$$y_n = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

ونهاية هذه المتتابعة من الدوال هي الدالة:

$$y_n(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

وهذا ما يمكن تأكيده بالحل المباشر باستخدام فصل المتغيرات.

$$dy = x^2\, dx$$

$$\int\ dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c.$$

$$1 = \frac{8}{3} + c \rightarrow c = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$$

نظرية النقطة الثابتة لباناخ

مقدمة

أهمية نظرية النقطة الثابتة لباناخ تكمن في أنها تشكل مصدر لمبرهنات الوجود والوحدانية في العديد من فروع التحليل إذ تتعلق هذه النظرية بشروط كافية لوجود ووحدانية النقطة الثابتة.

قبل أن نشرع في دراسة نظرية النقطة الثابتة لباناخ سوف نورد فيما يلي بعض المفاهيم والقوانين العامة اللازمة لدراسة هذه النظرية.

تعريف (النقطة الثابتة):

لتكن X مجموعة غير خالية و $T: X \to X$ تطبيق. نقول أن النقطة $x \in X$ أنها نقطة ثابتة وفق التطبيق T إذا كان $Tx = x$ بمعنى أن النقطة x تبقى ثابتة وفق التطبيق T) و هذا يعني أن الصورة Tx تطابق العنصر x .

مثال

لتكن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$.

نلاحظ أن النقاط الثابتة للدالة f هي 1 و 0 لأن:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

وبالتالي فإن $x = 0$ أو $x = 1$

تعريف (التقليص):

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متري نقول أن التطبيق $T: X \to X$ تقليصاً على X إذا وجد $0 < a < 1$ حيث

$$d(Tx, Ty) \leq a\, d(x, y): \forall x, y \in x.$$

ويعني هذا هندسياً أن لأي نقطتين x وy صورتين أقرب أحدهما إلى الأخرى من قرب النقطتين x وy ولا من بعضهما.

مثال

لتكن الدالة $f: \mathbb{R} \to \left[-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right]$ حيث

$$f(x) = tan^{-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

حسب نظرية القيمة المتوسطة، لكل $x\ ,\ \ y \in \mathbb{R}.$ يوجد $c \in [-2,2]$ حيث

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

وهذا يعني

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{1 + c^2}|x - y|$$

وبما أن $1 > \frac{1}{1+c^2}$ فإن الدالة / تقليصاً على $\mathbb{R}$.

تعريف (متباينة المثلث):

هي المترجحة التي تنص على أن طول أي ضلع من أضلاع مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الأخرين. أي إذا كانت ل دالة مترية فإن:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

حيث أن x و y و هي z رؤوس المثلث. ويمكن تعميمها باستخدام الاستنتاج الرياضي لتعطي الصورة العامة التالية:

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)+\ldots+d(x_{n-1},x_n)$$

تعريف (مجموع المتسلسلة الهندسية):

المتسلسلة $(a + ar + ar^2 + ar^3+\ldots+ar^n)_n$ تسمى متسلسلة هندسية حدها الأول a وأساسها r.

ويمكن ايجاد مجموعها كما يلي:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k$$

$$= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad\qquad r \neq 1$$

نظرية

إذا كان $X = (X,d)$ فضاء متري تام $T: X \to X$ تقليصا على X. فإن للتطبيق T نقطة ثابتة واحدة بالضبط.

البرهان:

تقوم فكرة البرهان على أننا ننشئ متتالية $(x_n)_n$ ونثبت أنها متتالية كوشي، ومن ثم نبين تقاربها، وبعدئذ نبرهن بأن نهايتها x نقطة ثابتة T ووحيدة.

أولا: ننشئ متتالية $(x_n)_n$ ونثبت أنها متتالية كوشي.

نختار أي عنصر x_0 من X ونعرف $(x_n)_n$ على النحو التالي:

$$(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

حيث

$$x_0, \qquad x_1 = Tx_0, \qquad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = T^nx_0, \ldots$$

إذن:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq a^m d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

واستناداً لمتباينة المثلث ومجموع متسلسلة هندسية نجد أنه إذا كان $n > m$ فإن

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (a^m + a^{m+1} + \ldots + a^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} a^k d(x_0, x_1) \\ &= a^m \frac{(1 - r^{n+m})}{1 - a} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

وبما أن $0 < a < 1$ فإننا نجد أن

$$1 - a^{n-m} < 1$$

وبالتالي فإن

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{a^m}{1 - a} d(x_0, x_1) \qquad\qquad n > m$$

وحيث أن $0 < a < 1$ و $d(x_0, x_1)$ عدد ثابت فإنه من الممكن جعل الطرف الأيمن من المتباينة الأخيرة أعلاه صغيراً جداً بقدر ما نشاء لدى أخذ m كبيراً بقدر كاف. وبالتالي فإن (x_n) متتالية كوشي.

ثانياً: الآن نبين أن (x_n) تقاربية.

بما أن $(x_n)_n$ متتالية كوشية في X ولدينا X فضاء متري تام. إذن $(x_n)_n$ تقاربية وليكن نهايتها x (أي أن $x_n \to x$)

ثالثاً: بقي أن نبين أن هذه النهاية x هي نقطة ثابتة ووحيدة للتطبيق T.

من متباينة المثلث نجد:

$$d(x,Tx) \leq d(x,x_n) + d(x_n,Tx)$$
$$= d(x,x_n) + d(Tx_{n-1},Tx)$$
$$\leq d(x,x_n) + ad(x_{n-1},x)$$

وبما أن $x_n \to x$ فإنه يمكننا القول أن

$$d(x,Tx) \leq d(x,x_n) + \alpha d(x_{n-1},x)$$

بالمرور للنهاية نجد:

$$d(x,Tx) \leq 0$$

وبالتالي فإن $d(x,Tx) = 0$ ومنه $x = Tx$

إذن x نقطة ثابتة لـT.

الآن نثبت أن x هي النقطة الثابتة الوحيدة للتطبيق T.

نفرض أن $Tx = x$ و $T\bar{x} = \bar{x}$ نقطتان ثابتتان للتطبيق T. إذن

$$d(x,\bar{x}) = d(Tx,T\bar{x}) \leq ad(x,\bar{x})$$

3.3 تطبيق نظرية باناخ على المعادلات التفاضلية

ملاحظة 1 (المجموعات المغلقة):

إذا كانت $\bar{C}$ مجموعة جزئية من الفضـــاء المتري C وكانت x_n أي متتالية من عناصـــر $\bar{C}$ تقاربية ونهايتها x فإن الشــرط اللازم والكافي كي تكون $\bar{C}$ مغلقة أن تكون $x \in \bar{C}$.

ملاحظة ٢ (الفضاء الجزئي التام):

إذا كان (C, d) فضاء متري تام و $\bar{C}$ مجموعة مغلقة في C فإن $(\bar{C}, d)$ هو أيضا فضاء متري تام.

نظرية (بيكارد في الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية العادية):

لـتـكـن $f: I \times J \to \mathbb{R}$ دالـة مـتـصـــلـة حيـث $I \times J := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ مستطيل مغلق $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بالتالي فإن:

f محدودة على $I \times J$ أي يوجد عدد $M > 0$ حيث

$$|f(x, y)| \leq M; \qquad \forall\ (x, y) \in I \times J$$

إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة للمتغير الثاني أي يوجد $k > 0$ حيث

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|; \qquad \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in J$$

عـنـدئـذ لكـل (x_0, y_0). نقطـة داخليـة من $I \times J$ يوجـد حـل وحيـد y لمســـألـة كوشـــي وهـذا الحـل معرف على الفترة $I_h := [x_0 - h, x_0 + h]$ حيث $h < min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right)$

البرهان:

ســـوف نـبـحـث عـن دالـة y مـعـرفـة عـلـى الـفـتـرة I_h تـمـثـل حـل لمســـألـة كـوشـــي (أي أن $(y: I_h \to R: h < min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right))$ دالة متصلة تعطى بالقانون

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

الناتج بعد إجراء التكامل على مسألة كوشي.

ليكن $(C[I_h], d)$ الفضاء المتري التام المؤلف من كل الدوال المتصلة على الفترة I_hحيث

$$d(f, g) = \sup_{x \in I_h} |f(x) - g(x)|;, \forall f, \in C[I_h]$$

وليكن $\bar{C}[I_h]$ الفضاء الجزئي من $C[I_h]$ والمؤلف من كل الدوال $[I y \in C[I_h]$ والتي تحقق

$$d(y, y_0) = \sup_{x \in I_h} |y(x) - y_0| \ \leq Mh$$

وبما أن $\bar{C}[I_h]$ مغلق $C[I_h]$، بالتالي فإن $\bar{C}[I_h]$ فضاء تام.

ليكن Tتطبيق معرف على $\bar{C}[I_h]$ حيث:

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

واستناداً لنظرية النقطة الثابتة لباناخ فإذا كان التطبيق T تقليصاً على $\bar{C}[I_h]$ فإنه يوجد حل وحيد لمسألة كوشي.

قبل أن نبرهن أن T تقليص لابد أن نبرهن أن $T(\bar{C}[I_h]) \subset \bar{C}[I_h]$ أي أن لكل $y \epsilon \bar{C}[I_h]$ فإن Ty متصل ويحقق $d(Ty, y_0)$.

لتكن $\epsilon > 0$ نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ لدليل لكل $x_1, x_2 \in I_h$ حيث $x_1 < x_2$ و $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|Ty(x_1) - Ty(x_2)| = \left| \int_{x_0}^{x_1} f\big(t, y(t)\big)\, dt - \int_{x_0}^{x_2} f\big(t, y(t)\big)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} f\big(t, y(t)\big)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} \left| f\big(t, y(t)\big) \right| dt$$

$$\leq M \int_{x_1}^{x_2} dt$$

$$= M|x_2 - x_1|$$

$$\leq M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

بالتالي Ty متصل بانتظام على I_h. إذن هو متصل.

أيضاً:

$$d(Ty, y_0) = \sup_{x \in I_h} |Ty(x) - y_0|$$

$$= \sup_{x \in I_h} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right|$$

$$\leq \sup_{x \in I_h} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right|$$

$$\leq M \sup_{x \in I_h} \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\leq M |x - x_0|$$

$$\leq Mh$$

إذن لكل $y \epsilon \bar{C}[I_h]$ لدينا $Ty \epsilon \bar{C}[I_h]$

الآن سنبرهن أن T تقليص على $\bar{C}[I_h]$

لتكم $y \epsilon \bar{C}[I_h]$، وحيث f تحقق شرط ليبشتنز فإن

$$|Ty(x) - Tg(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y(t)) - f(t, g(t)) \right| dt$$

$$\leq k \int_{x_0}^{x} |y(t) - g(t)|\, dt$$

$$\leq k \sup_{x \in I_h} |y(x) - g(x)| \int_{x_0}^{x} dt$$

$$\leq k |x - x_0|\, d(y, g)$$

$$\leq khd(y, g)$$

إذن

$$|Ty(x) - Tg(x)| \leq ad(y, g) \qquad a = kh$$

وبما أن $a = kh < 1$ فإن T تقليص على $\bar{C}[I_h]$.

وهذا يعني أنه يوجد عنصر وحيد $y \epsilon \bar{C}[I_h]$ حيث أن $y = Ty$ حل لمسألة كوشي.

أي أن دالة $y: I_h \to \mathbb{R}$ متصلة تُعطى بالقانون

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$$

وتُحقق $y(x_0) = y_0$. وبهذا يكتمل البرهان.

نظرية الاستقرار

التعريف: الإستقرار في الرياضيات هي حالة من حالات الأنظمة أو بتعبير آخر هي خاصية رياضية عادة ما تذكر إقترانا بحل معادلة تفاضلية حيث يقال حل المعادلة التفاضلية كذا و كذا مستقر أو غير مستقر

تعريف الاستقرار:

بفرض Xe نقطة توازن للجملة تكون Xe مستقرة اذا تحقق الشرط

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ ; \exists \delta > 0; \| X(t0) - Xe \| < \delta \rightarrow \| X(t0) - Xe \| < \mathcal{E}$$

مستقر استقرارا مقاربا:

تكون نقطة التوازن Xe للجملة مستقرة استقرارا مقاربا اذا كان مستقرا وحقق الشرط :

$$\forall \ \delta > 0 ; \| X(t0) - Xe \| < \delta \rightarrow \lim_{t = \infty} \| X(t) // = Xe$$

نتيجة: يكون الحل غير مستقر اذا خالف الشروط السابقة

مستقر استقرارا مقاربا:

اذا كان أي حل للمعادلة يحقق العلاقة

$$\|X(t0)\| < B \ \|X(t0)\| \ e^{-a(t-t0)}$$

حيث $t > 0, a > 0, B > 0$

- نلاحظ ان تطور استقرار نقطة التوازن لجملة مع تأخر زمني أو بدونه يبقى قريبا من نقطة التوازن

- والاستقرار المقارب يضمن الشروط السابقة ويدل بأن الجملة ستعود الى نقطة التوازن اذا ابتعدنا عنها بشكل صغير
- اما الاستقرار الاسي يضمن شروط الاستقرار المتقارب وسرعة التقارب

طريقة ليبانوف

لناخذ الدالة $V(X): D \longrightarrow R$ حيث $D \subseteq R^n$

1. تكون نقطة الأصل مستقرة استقراراً مقارباً من أجل اضطرابات غير كبيرة لا تؤثر على توازن الجملة اذا كانت الدالة $V(X)$ تحقق ما يأتي

   1- $V(X) > 0$ من أجل $X > 0$

   2- $V(0)=0$

   3- $V(X)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة مع الأخذ بعين الاعتبار كل ركبات X

   4- $V(X) < 0$ من أجل $X \neq 0$ و X واقعة ضمن جوار نقطة الأصل

مثال

$$X_1 = - x_1$$

$$x2 = -\frac{1}{4} x2 \; (1 \; - e - t)$$

الجملة لها نقاط توازن هي $(x1 , x2) = (0,0)$

تحقق من الاستقرار بتابع ليابونوف

$$V(x1, x2) = x^2 1 + 2_x^2 2 \; (1 + e^{-t})$$

بالاشتقاق

$X1 = - X\,1$

$$x2 = -\frac{1}{4}x2\,(1 - e - t)$$

$V(x,t) = 2X_1X_1 + 4X_2X_2\,(1+ e^{-t}) - 2x^2\,2^{e-t}$

$-2x^2\,1 - x^2{}_2\,(1-e^{-2t})\,(1+e^{-t}) - 2x^2\,2^{e-t}$

$-2x^2\,1 - x^2{}_2\,(1-e^{-2t} + 2e^{-t})$

مستقر لأن

$V(x,t) = 2X^2{}_1 - X^2{}_2\,(1-e^{-2t} + 2e^{-t}) \leqslant 0$

المراجع

1- *https://www.researchgate.net/publication/330324463_ktab_wjwd_wwhd anyt_hl_almadlat_altfadlyt_mn_alrtbt_alawly*

2- *http://www.math.byu.edu/~grant/courses/m634/f99/lec20.pdf*